Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«Северо-Восточный федеральный университет им. М.К. Аммосова»
Институт математики и информатики
Кафедра дифференциальных уравнений

УТВЕРЖДАЮ

Директор ИМИ
__________ Афанасьева В.И.
«18» сентября 2018 года

Программа вступительного экзамена в аспирантуру

Направление подготовки
01.06.01 «Математика и механика»
профиль: дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

Якутск 2018

При поступлении в аспирантуру по направлению 01.06.01. «Математика и механика», профиль «Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление» сдается вступительное испытание, включающее в себя ответ на вопросы билета.

Цель проведения вступительного испытания:

- проверить уровень знаний претендента;
- определить склонности к научно-исследовательской деятельности;
- выяснить мотивы поступления в аспирантуру;
- определить область научных интересов.

Вступительное испытание для поступающих, включая иностранных граждан, проводится в форме устного экзамена.

Продолжительность вступительного испытания – 3 часа.

Вопросы к экзамену

I часть

Математический анализ

1. Предел функции одной переменной. Различные определения, эквивалентность определения предела на языке последовательностей и основного определения.
2. Предельные точки множества. Лемма Больцано-Вейерштрасса, критерия Больцано-Коши существования конечного предела для последовательности и функции.
3. Непрерывность функции. Теоремы Больцано-Коши, Вейерштрасса, Кантора о непрерывных функциях.
4. Основные теоремы дифференциального исчисления (Ферма, Ролля, Лагранжа о конечном приращении), формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа и Коши (без доказательства).
5. Частные производные и дифференциалы функций многих переменных. Связь между дифференцируемостью, непрерывностью и существованием частных производных (в отличии от случая одного переменного).
6. Определенный интеграл Римана. Критерий интегрируемости, три признака интегрируемости (по непрерывности, монотонности, ограниченности), приложения определенного интеграла (основные формулы без доказательства).
7. Несобственные интегралы, критерии сходимости, признаки сравнения. Признаки Абеля и Дирихле (без доказательства).
8. Кратные интегралы, теоремы о сведении двойного интеграла к повторным, замена переменных в кратном интеграле (без доказательства), проиллюстрировать в случае цилиндрических и сферических координат.
9. Числовые ряды. Признаки Даламбера и Коши сходимости положительных рядов, абсолютная и условная сходимость, признак Лейбница сходимости знакочередующегося ряда. Оценка остатка знакочередующегося ряда.

10. Функциональные ряды, равномерная сходимость. Функциональные свойства суммы ряда.
11. Степенной ряд. Теорема Абеля, радиус сходимости, формула Коши-Адамара.
12. Поверхностные интегралы и их вычисление.
13. Необходимые и достаточные условия экстремума функции одной переменной. Экстремум функции многих переменных (без доказательства).

Функциональный анализ

14. Метрическое пространство, принцип сжатых отображений, связь с итеративными методами.
15. Гильбертово пространство, теорема о проекциях.
16. Линейный функционал, общий вид линейного функционала в гильбертовом пространстве.

Теория функций комплексного переменного

17. Дифференцируемость по комплексной переменной, аналитические функции.
18. Интеграл по комплексной переменной, интегральная теорема Коши, интегральная формула Коши.
19. Ряд Лорана. Разложение аналитической функции в ряд Лорана.
20. Вычеты. Теорема о вычетах.

Геометрия

21. Уравнение прямой на плоскости и в пространстве. Различные уравнения плоскости в пространстве.
22. Приведение кривой второго порядка к каноническому виду.
23. Кривизна кривой.
24. Определение поверхности. Касательная плоскость и нормаль к поверхности.
25. Геометрический смысл первой и второй квадратичных форм поверхности.

Алгебра

26. Определители и их свойства. Метод Крамера.
27. Действия над матрицами. Обратная матица.
28. Ранг матрицы и методы его вычисления. Система линейных уравнений, метод Гаусса.
29. Линейное пространство, евклидово пространство, скалярное произведение и его свойства. Ортонормированные базисы, ортогональные преобразования.
30. Линейные операторы в конечномерных пространствах и их матицы. Собственные векторы и характеристические числа.
31. НОД и алгоритм Евклида.
32. Группа, кольцо, поле, подгруппа, изоморфизм групп, нормальный делитель, фактор группа.

II часть

Обыкновенные дифференциальные уравнения

1. Теорема существования и единственности решения задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений.
2. Гладкость решения задачи Коши по начальным данным и параметрам, входящим в правые части системы уравнений. Продолжение решения.
3. Общая теория линейных уравнений и систем (область существования решения, фундаментальная матрица Коши, формула Лиувилля–Остроградского, метод вариации постоянных и др.).
4. Автономные системы уравнений. Положения равновесия. Предельные циклы.
5. Устойчивость по Ляпунову. Теорема Ляпунова об устойчивости положения равновесия по первому приближению.
6. Задачи оптимального управления. Принцип максимума Понтрягина (без доказательства), приложение к задачам быстродействия для линейных систем.
7. Краевая задача для линейного уравнения или системы уравнений. Функция Грина. Представление решения краевой задачи.
8. Задача Штурма–Лиувилля для уравнения второго порядка. Свойства собственных функций.
9. Системы обыкновенных дифференциальных уравнений с комплексными аргументами. Доказательство теоремы существования и единственности аналитического решения методом мажорант.
10. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. Теорема существования и единственности решения при условиях Каратеодори.
11. Линейные и квазилинейные уравнения с частными производными первого порядка. Характеристики. Задача Коши. Теория Гамильтона–Якоби.

Уравнения с частными производными

12. Системы уравнений с частными производными типа Ковалевской. Аналитические решения. Теория Коши–Ковалевской.
13. Классификация линейных уравнений второго порядка на плоскости. Характеристики.
14. Задача Коши и начально-краевые задачи для волнового уравнения и методы их решения. Свойства решений (характеристический конус, конечность скорости распространения волн, характер переднего и заднего фронтов волны и др.)
15. Задачи Дирихле и Неймана для уравнения Пуассона и методы их решения. Свойства решений (принцип максимума, гладкость, теоремы о среднем и др.)
16. Задача Коши и начально-краевые задачи для уравнения теплопроводности и методы их решения. Свойства решений (принцип

максимума, бесконечная скорость распространения, функция источника и др.)

17. Обобщенные функции. Свертка обобщенных функций, преобразование Фурье.
18. Пространства Соболева W_p^m . Теоремы вложения, следы функций из W_p^m на границе области.
19. Обобщенные решения краевых задач для эллиптического уравнения второго порядка. Задачи на собственные функции и собственные значения.
20. Псевдодифференциальные операторы (определение, основные свойства).
21. Нелинейные гиперболические уравнения. Основные свойства.
22. Монотонные нелинейные эллиптические уравнения. Основные свойства.
23. Монотонные нелинейные параболические уравнения. Основные свойства.

Динамические системы

24. Абстрактные топологические динамические системы: определение, основные свойства, различные классы движений в динамических системах.
25. Предельные свойства динамических систем: предельные точки и множества, инвариантность.
26. Минимальность множества и рекуррентные движения. Теоремы Биркгофа.
27. Почти периодические движения. Устойчивость по Ляпунову. Теоремы Маркова.

Критерии оценки ответа

Оценка «отлично» выставляется поступающему в аспирантуру, если он показывает высокий уровень теоретической подготовки, умение свободно ориентироваться в основном содержании предмета, отвечает на вопросы полно и правильно.

Оценка «хорошо» выставляется, если поступающий понимает суть современных проблем в области математического образования, владеет в целом содержанием предмета, но при этом допускает некоторые неточности, не имеющие принципиального значения и не влияющие существенным образом на благоприятное впечатление от его ответа на экзамене.

Оценка «удовлетворительно» выставляется, если он владеет в целом ведущими понятиями курса, понимает суть основных положений, но во время ответа показывает недостаточно глубокие и поверхностные знания. Вместе с тем, на основе ответа в целом, можно судить об удовлетворительном уровне готовности аспиранта.

Оценка «неудовлетворительно» выставляется поступающему, если он не знает основ курса, не ориентируется в ведущих положениях.

Список рекомендуемой литературы

Основная литература

по I части

1. Фихтенгольц Г.М. Основы математического анализа. т.т.1,2.-М.:Наука,1969
2. Зорич В.А. Математический анализ. Части 1,2.М.:Наука,1984
3. Кудрявцев Л.Д. Математический анализ т.т.1,2.-М.:Высшая школа,1970
4. Колмогоров А.Н.,Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа.-М.:Наука,1968
5. Люстерник Л.А., Соболев В.И. Элементы функционального анализа. –М.:Наука,1965
6. Маркушевич А.И. Краткий курс теории аналитических функций. М.: Наука, 1978.
7. Шабат Б.В. Введение в комплексный анализ Часть 1. М.: Наука, 1985.
8. Привалов И.И. Аналитическая геометрия. М.: ФМЛ, 1963.
9. Моденов П.С. Аналитическая геометрия. М.: МГУ, 1969.
10. Норден А.П. Краткий курс дифференциальной геометрии. М.: Физматгиз, 1958.
11. Курош А.Г. Курс высшей алгебры. –М.:Наука,1975
12. Кострикин А.И. Введение в алгебру –М.:Наука,1981

по II части

1. Владимиров В.С., Жаринов В.В. Уравнения математической физики. М.:Физматлит, 2000 г.
2. Лионс Ж.-Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. М.:Мир, 1972 г.
3. Михайлов В.П. Дифференциальные уравнения в частных производных. М.:Наука, 1983 г.
4. Пикулин В.П., Похожаев С.И. Практический курс по уравнениям математической физики. М:Наука, 1995 г.
5. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.:Наука, 1998 г. (и другие издания).
6. Матвеев Н.М. Дифференциальные уравнения. Изд. Ленинградского университета, 1963 г. (и другие издания)
7. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.:Наука, 1963 г. (и другие издания).
8. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 2004 г. (и другие издания).
9. Трикоми Ф. Дифференциальные уравнения. Издательство иностранной литературы, М.; 1962 г.
10. Федорюк М.В. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.:Наука, 1980 г.

11. Филиппов А.Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М.: Издательство физ.-мат. литературы, 1985 г.

Дополнительная литература

1. Арнольд В.И. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1971.
2. Мартинсон Л.К., Малов Ю.И. Дифференциальные уравнения математической физики. М.: Изд-во МГТУ, 1996.
3. Петровский И.Г. Лекции об уравнениях с частными производными. М.: Наука, 1961.
4. Тихонов А.Н., Васильева А.Б., Свешников А.Г. Дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1985.
5. Шубин М.А. Псевдодифференциальные операторы и спектральная теория. М.: Наука, 1978.